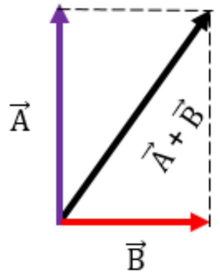
1. OPERACIONES CON VECTORES.

- SUMA GRÁFICA DE DOS VECTORES.

Para sumar gráficamente dos vectores $\vec{A} + \vec{B}$ se coloca el origen $\vec{B}$ en el extremo de $\vec{A}$. El vector que resulta de la suma gráfica es el que va desde el origen de $\vec{A}$ al extremo de $\vec{B}$.
Otra forma de sumar gráficamente dos vectores es mediante la regla del paralelogramo: se sitúan los dos vectores unidos por su origen y se completa un paralelogramo. La diagonal es la suma $\vec{A} + \vec{B}$:



El módulo de la suma se puede obtener a partir de la expresión:

$$|\vec{A} + \vec{B}| = \sqrt{|\vec{A}|^2 + |\vec{B}|^2 + 2 \cdot |\vec{A}| \cdot |\vec{B}| \cdot \cos\alpha}$$

Si $\vec{A}$ y $\vec{B}$ son perpendiculares ($\cos\alpha = 0$) queda el teorema de Pitágoras: $|\vec{A} + \vec{B}| = \sqrt{|\vec{A}|^2 + |\vec{B}|^2}$

2. VECTORES UNITARIOS

Un vector unitario es un vector cuyo módulo es 1.
- El vector unitario $\vec{i}$ es un vector unitario en la dirección del eje X positivo.
- El vector unitario $\vec{j}$ es un vector unitario en la dirección del eje Y positivo.

Los vectores $\vec{i}$ y $\vec{j}$ se utilizan para expresar las componentes X e Y respectivamente de un vector.
Si queremos obtener un vector unitario $\vec{u}$ con la misma dirección y sentido que $\vec{v}$ tenemos que dividir el vector el vector $\vec{v}$ por su módulo $\quad \vec{v} = 3\vec{i} + 4\vec{j} \quad\quad |\vec{v}| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$

$$\vec{u} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \frac{3\vec{i} + 4\vec{j}}{5} = \frac{3}{5}\vec{i} + \frac{4}{5}\vec{j}$$

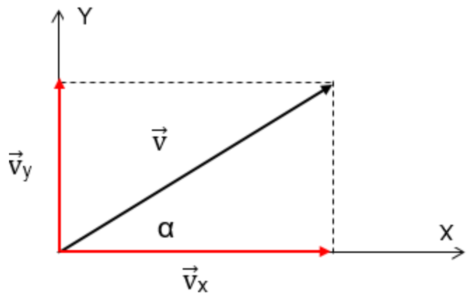
3. SUMA ANALÍTICA DE VECTORES

Para sumar analíticamente dos vectores se suman sus componentes en el eje X y en el eje Y expresadas con los vectores unitarios $\vec{i}$ y $\vec{j}$.

EJERCICIO
Dados los siguientes vectores: $\vec{v}_1 = 3\vec{i} + 4\vec{j}$; $\vec{v}_2 = 2\vec{i} + 2\vec{j}$
a) Suma los vectores gráfica y analíticamente.
b) Halla el módulo de la suma de los dos vectores.
c) Halla $\vec{v}_2 - \vec{v}_1$ gráfica y analíticamente.

4. VECTOR COMO SUMA DE SUS DOS COMPONENTES.

Podemos expresar las dos componentes de un vector $\vec{v}$ si sabemos cuál es su módulo $|\vec{v}|$ y cuál es el ángulo α que forma con el eje X como se ve en el dibujo:



Aplicamos la definición de seno y coseno al ángulo α del dibujo:

$$\text{sen}\alpha = \frac{|\vec{v}_y|}{|\vec{v}|} \quad \rightarrow \quad |\vec{v}_y| = |\vec{v}| \cdot \text{sen}\alpha \quad \text{o} \quad v_y = v \cdot \text{sen}\alpha$$

$$\cos\alpha = \frac{|\vec{v}_x|}{|\vec{v}|} \quad \rightarrow \quad |\vec{v}_x| = |\vec{v}| \cdot \cos\alpha \quad \text{o} \quad v_x = v \cdot \cos\alpha$$

5. PRODUCTO ESCALAR DE DOS VECTORES.

El producto escalar de dos vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ se representa $\vec{A} \cdot \vec{B}$ y viene dado por:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}| \cdot |\vec{B}| \cos\alpha \qquad \text{(comprobar que es un escalar)}$$

Donde α es el ángulo que forman los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$.

El producto escalar de los vectores unitarios: $\vec{i} \cdot \vec{j} = 0$ $\quad \vec{i} \cdot \vec{i} = 1$ $\quad \vec{j} \cdot \vec{j} = 1$

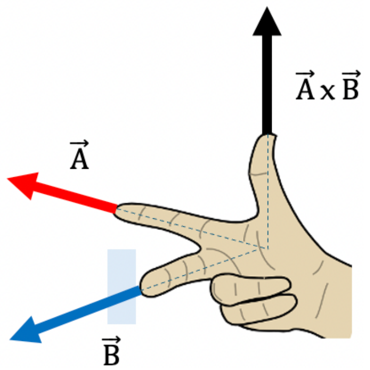
Podemos obtener la expresión analítica del producto escalar:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = (A_x \vec{i} + A_y \vec{j}) \cdot (B_x \vec{i} + B_y \vec{j}) = \mathbf{A_x B_x + A_y \cdot B_y} \qquad \text{(comprobar)}$$

6. PRODUCTO VECTORIAL DE DOS VECTORES.

El producto vectorial de dos vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ se representa $\vec{A} \times \vec{B}$ y es un vector cuyas características son:

- La dirección de $\vec{A} \times \vec{B}$ es perpendicular a $\vec{A}$ y $\vec{B}$.
- El sentido de $\vec{A} \times \vec{B}$ es el que determina la regla del sacacorchos o la de la mano derecha.



- El módulo de $\vec{A} \times \vec{B}$ viene dado por: $|\vec{A} \times \vec{B}| = |\vec{A}| \cdot |\vec{B}| \cdot \text{sen}\,\theta$ $\qquad \theta = \widehat{\vec{A}\vec{B}}$

El producto vectorial de dos vectores paralelos es cero porque sen 0º = 0

<u>Ejercicio</u>: Halla los siguientes productos vectoriales entre los vectores unitarios $\vec{i}$, $\vec{j}$ y $\vec{k}$:

$\vec{i} \times \vec{i} =$ $\vec{i} \times \vec{j} =$ $\vec{j} \times i =$ $\vec{k} \times \vec{j} =$ $\vec{k} \times \vec{i} =$

Si multiplicamos vectorialmente dos vectores cualesquiera en el espacio:

$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$

$\vec{b} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}$

Obtenemos la expresión analítica del producto vectorial:

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}) \times (b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}) = (a_y b_z - a_z b_y)\, \vec{i} + (a_z b_x - a_x b_z)\, \vec{j} + (a_x b_y - a_y b_x)\, \vec{k}$$

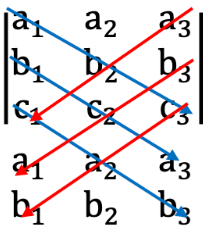
Que es precisamente el resultado de desarrollar el siguiente determinante:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

APÉNDICE: CÁLCULO DE DETERMINANTES.

Sea el determinante $D = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$

Regla de Sarrus:



Azul (hacia la derecha)= positivo Rojo (hacia la izquierda) = negativo

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 b_2 c_3 + a_3 b_1 c_2 + a_2 b_3 c_1 - a_3 b_2 c_1 - a_1 b_3 c_2 - a_2 b_1 c_3$$

Ejemplo: $\vec{u} = 2\,\vec{i} - 2\,\vec{j} + 3\,\vec{k}$

$\vec{v} = 2\,\vec{i} - \vec{j} - 3\,\vec{k}$

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -2 & 3 \\ 2 & -1 & -3 \end{vmatrix} = 6\vec{i} + (-2\vec{k}) + 6\vec{j} - (-\,4\vec{k}) - (-\,3\vec{i}) - 6\vec{j} = 9\vec{i} + 2\vec{k}$$